Simulare BAC 2019
Științele Naturii

SUBIECTUL I

1. Calculaţi $a_{12}+a_{16}+a_{20}+a_{34}$ ştiind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu proprietatea $a_1+a_4+a_7+a_{10}+...+a_{40}=336$.

2. Calculaţi $\dfrac{\log_2 3+\log_2 3^2+\log_2 3^3+...+\log_2 3^{50}}{51}$

3. Să se detemine $a,b\in \mathbf{R}$, astfel încât $(-1+i)^{12}=a+bi$

4. Care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr de două cifre, suma cifrelor să fie agală cu 8?

5. Fie *ABC* un triunghi echilateral şi *O* centrul cercului circumscris.Să se calculeze $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

6. Se consideră triunghiul *ABC* în care au loc relaţiile $2a=b+c$ şi $2A=B+C$. Determinaţi măsurile unghiurilor triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a\end{pmatrix} \middle| a,b\in \mathbf{R}\right\}$ şi $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2019 & 1\end{pmatrix}$.

a) Dacă $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 2\end{pmatrix}$, calculaţi $b_n=\det\left(B+B^2+\cdots+B^n\right)$.

b) Arătaţi că, dacă $X\in M_2(\mathbf{R})$, cu proprietatea că $A\cdot X=X\cdot A$, atunci $X\in M$.

c) Să se determine matricele $X\in M_2(\mathbf{R})$ astfel încât $X^{2019}=A$.

2. Fie $n\in \mathbf{N}$**,** $n\geq 2$ şi polinomul $f\in \mathbf{R}[X]$, $f=nX^n-X^{n-1}-X^{n-2}-\cdots-X-1$, având ca rădăcini, numerele complexe $x_1, x_2, \cdots x_n$.

a) Să se arate că $x_1=1$este rădăcină a polinomului *f*.

b) Să se arate că pentru orice $n\in \mathbf{N}$**,** $n\geq 2$, polinomul $g=(X-1)^2$ nu divide polinomul *f*.

c) Arătaţi că $|x_k|\leq 1$, pentru orice $k\in\{2,3,\cdots n\}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

a) Să se determine asimptotele la graficul funcţiei *f*.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(1)+f(2)+\cdots f(n)}{n^2}$.

c) Să se arate că $|a-b|\leq |f(a)-f(b)|$ pentru orice valori $a,b\in[1,\infty)$.

2. Fie $f_n:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}$ şi $g_n:\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\to\mathbf{R}$, $g_n(x)=\begin{cases} f_n(x), & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ n, & x=0\end{cases}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

a) Arătaţi că $f_{n+2}(x)-f_n(x)=2\cos(n+1)x$, oricare ar fi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Arătaţi că funcţia g_n este integrabilă, pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$.

c) Calculaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_{2010}(x)dx$.

Prof. Zîrnă Cătălin