Probleme recapitulative clasa a IX-a

1. Aflaţi câte perechi $(a,b)\in\mathbf{N}^2$ există astfel încât numărul $A=\sqrt{a^2+5}+\sqrt{b^2+3}$ este raţional.

2. Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{x-1}{3}\right]=\frac{x+1}{4}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului a.

3. Să se determine $x\in\mathbf{Z}$ astfel încât $\sqrt{x^2-10x+25}-5|10-2x|+9=0$.

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left|1-|3-x|\right|=2$.

5. Să se determine elementele mulţimii $A=\left\{x\in\mathbf{Z}\ \middle|\ (1+x)^2\le 9\right\}$.

5. Rezolvaţi ecuaţia $2x+\frac{1}{|x-1|}=1$ în mulţimea numerelor reale.

6. Rezolvaţi ecuaţia $x^2-2|x|=0$.

7. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}, n\in\mathbf{N}^*$, cu $x_1=2, x_{x_n}=n+2, \forall n\geq 1$. Calculaţi x_5.

8. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$; definit prin $a_n=5n-7$. Demonstraţi că şirul (a_n) este în progresie aritmetică şi să se calculeze a_1 şi raţia.

9. Să se determine $x\in\mathbf{R}$ dacă numerele $x-2011,\ x-1,\ x+2011$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

10. Să se insereze între $\frac{1}{243}$ şi $\frac{1}{9}$ două numere reale *a*, *b* astfel încât cele 4 numere să fie în progresie geometrică.

11. Să se determine $x\in\mathbf{R}$ dacă numerele $x-2010,\ 1005x+1,\ 2011x$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

12. Să se determine numărul real a, ştiind că numerele $11\cdot 3^a, 9^a+9, 3^{a+2}$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

13. Calculaţi $a_{12}+a_{16}+a_{20}+a_{34}$ ştiind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu proprietatea $a_1+a_4+a_7+a_{10}+\ldots+a_{40}=336$.

14. Determinaţi $m\in\mathbf{R}$ astfel încât $\frac{x^2-mx+2}{x^2-3x+6}\geq -1$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

15. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ astfel încât dreapta de ecuaţie $2x-3y+m=0$ să fie tangentă parabolei de ecuaţie $x^2-(m-1)x+1=y$.

16. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+2$. Să se calculeze $f(2f(1)+f(2011))$.

17. Să se determine funcţia al cărei grafic este simetricul graficului funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=-2x+4$ faţă de dreapta $x=1$.

18. Se consideră funcţiile $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât $f(x)=3x-2$ şi $(f\circ g)(x)=2x+3$. Aflaţi funcţia g.

19. Fie funcţia $f:[-1;1]\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$. Arătaţi că f este o funcţie impară.

20. Fie pătratul ABCD cu lungimea laturii a, $a\in(0;\infty)$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$.

21. Dacă $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DM}=-0{,}5\cdot\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AN}=9\overrightarrow{DC}$, $3\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BC}$, să se arate că punctele *M*, *N*, *P* sunt coliniare.

22. Să se determine coordonatele punctului *M*, mijlocul segmentului *AB*, ştiind că $\overline{OA}=2\bar{i}+5\bar{j}$ şi $\overline{OB}=-4\bar{i}+3\bar{j}$.

23. Fie $\vec{u}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}$ si $\vec{v}=-\sqrt{3}\cdot\vec{i}+\vec{j}$. Determinaţi $a, b\in\mathbf{R}$ astfel încât u şi v să fie coliniari, iar $|\vec{u}|=4$

24. Se consideră un triunghi ABC şi M un punct în plan pentru care $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$. Să se demonstreze că punctele B, M, C sunt coliniare.

25. Fie *ABCDEF* un hexagon regulat de latură 1. Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

26. Să se arate ca într-un paralelogram *ABCD* are loc relaţia: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$

27. Se dau vectorii $\vec{v}_1=3\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}_2=\vec{i}-2\vec{j}$. Determinaţi coordonatele vectorului $\vec{w}=\vec{v}_1-2\vec{v}_2$.

28. Se consideră vectorii $\vec{u}=3\vec{i}-a\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+7\vec{j}$. Să se determine numărul real *a* pentru care vectorii daţi sunt coliniari.

29. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u}=3\vec{i}-4\vec{j}$ şi $\vec{v}=-2\vec{i}-3\vec{j}$. Să se calculeze $7\vec{u}-4\vec{v}$.

30. Fie punctele $A(2a-1,3), B(a,2a+1)$. Să se determine $a\in\mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-4\vec{j}$.

31. Fie $A(-2,0), B(4,0), C(0,6)$. Să se determine coordonatele lui *D* astfel încât *ACBD* să fie paralelogram.

32. Dacă $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x=\dfrac{1}{5}$, calculaţi $\cos x$.

33. Să se calculeze numărul $a=\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$.

34. Dacă $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ şi $\sin x=\dfrac{4}{5}$, să se calculeze $\sin 2x$.

35. Dacă $\mathrm{tg}x=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, să se calculeze valoarea expresiei $E=\sqrt{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$.

36. Dacă $a, b\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin a+\sin b=m$, $\cos a+\cos b=n$, aflați $\cos(a+b)$ în funcţie de *m* şi *n*.

37. Să se calculeze $\sin\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{8}$.

38. Să se afle semnul numărului $\sin 3-\sin 2$.

39. Arătaţi că numărul $A=\dfrac{1}{\sin(10^0)}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos(10^0)}$ este natural.

40. Care sunt extremele expresiei $E = 8 + 4\sin x \cdot \cos x$?

41. Să se calculeze sin 2x, ştiind că $\sin x = \frac{3}{5}$ şi x este măsura unui unghi ascuţit.

42. Calculaţi $\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$.

43. Calculaţi $\cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{4\pi}{3} + tg\frac{7\pi}{4}$.

44. Să se arate egalitatea: $\frac{\sin^2 10^0 - \sin^4 10^0}{\cos^2 10^0} + \cos^2 10^0 = 1$

45. Să se calculeze $\sin^2 105^0 - \cos^2 15^0$.

46. Calculati $\cos(180^0 - x)$, dacă $\cos x = \frac{4}{5}$.

47. Să se calculeze $\sin(180^\circ - x)$ ştiind că $\sin x = \frac{3}{5}$.

48. Să se calculeze $\sin x \cdot \cos(90^0 - x) + \cos^2(180^0 - x), x \in (0^0, 90^0)$.

49. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dacă $A(2,3)$, $B(0,5)$ şi $C(-2,-1)$.

Prof. Gabriela Constantinescu